WOJEWÓDZKI KONKURS PRZEDMIOTOWY
Z MATEMATYKI

dla uczniów szkół podstawowych w roku szkolnym 2021/2022

 **etap wojewódzki - SCHEMAT OCENIANIA**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Nr zadania | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** |  **14** |
| Poprawna odpowiedź | **B** | **D** | **C** | **D** | **E** | **C** | **D** | **C** | **A** | **B** | **E** | **A** | **E** | **F** | **P** |
| Liczba punktów | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

**Zadanie nr 15 (7 pkt)**

W trójkącie prostokątnym ABC kąt przy wierzchołku A jest prosty, a kąt przy wierzchołku B ma miarę 30º. Na boku AB tego trójkąta obrano punkt D tak, że miara kąta CDA jest równa 60º, a odcinek AD ma długość 6. Oblicz pole powierzchni trójkąta ABC.

Rozwiązanie:

 

Kąt ACD ma miarę 30º, a więc w trójkącie ADC $\left|CD\right|=12$ i $\left|AC\right|=6\sqrt{3}$

I sposób: Kąt CDB ma miarę 120º, a więc kąt BCD ma miarę 30º.

II sposób: Kąt ACB ma miarę 60º, a więc kąt DCB ma miarę 30º.

Ponieważ w trójkącie DBC dwa kąty mają równe miary, to jest on równoramienny

 i $\left|DB\right|=\left|CD\right|=12$

$\left|AB\right|=6+12=18$

$P=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}∙18∙6\sqrt{3}=54\sqrt{3}$

|  |  |
| --- | --- |
| Rysunek  | 1 pkt |
| Obliczenie kąta ACD 30º | 1 pkt |
| Obliczenie kąta DCB 30º | 1 pkt |
| Podanie długości $\left|AC\right|=6\sqrt{3}$ | 1 pkt |
| Podanie długości $\left|CD\right|=12$ | 1 pkt |
| Zauważenie, że trójkąt DBC jest równoramienny i podanie $\left|DB\right|=12$ | 1 pkt |
| Obliczenie pola trójkąta ABC | 1 pkt |

**Zadanie nr 16 ( 7 pkt )**

Przekątna trapezu ma długość 8 i tworzy z podstawami tego trapezu kąty 45º. Połowa sumy długości podstaw trapezu jest równa długości jego wysokości. Oblicz pole tego trapezu.

Rozwiązanie:

 

$h\sqrt{2}=8$ stąd $h=\frac{8}{\sqrt{2}}=\frac{8\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{2}$ lub $h^{2}+h^{2}=8^{2}$ $2h^{2}=64$ $h^{2}=32$ $h=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

Zapisujemy zależność wynikającą z treści zadania $\frac{1}{2}\left(a+b\right)=h$ czyli $a+b=2h=8\sqrt{2}$

Obliczamy pole $P=\frac{1}{2}\left(a+b\right)∙h=\frac{1}{2}∙8\sqrt{2}∙4\sqrt{2}=16∙2=32$

lub $P=h∙h=h^{2}=\left(4\sqrt{2}\right)^{2}=16∙2=32$

|  |  |
| --- | --- |
| Rysunek z zaznaczoną przekątną i kątami 45º | 1 pkt |
| Narysowanie wysokości i zauważenie, że trójkąt jest prostokątny równoramienny | 1 pkt |
| Obliczenie wysokości (1 pkt za metodę) | 2 pkt |
| Zapisanie zależności między wysokością i sumą długości podstaw | 1 pkt |
| Obliczenie pola powierzchni (1 pkt za poprawną metodę) | 2pkt |

**Zadanie nr 17 ( 7 pkt )**

Dana jest liczba dwucyfrowa, w której cyfra jedności jest większa od cyfry dziesiątek. Liczba ta przy dzieleniu przez sumę swoich cyfr daje iloraz 4 i resztę 3. Przy dzieleniu przez różnicę cyfr daje iloraz 15 i resztę 2. Jaka to liczba?

Rozwiązanie:

x – cyfra dziesiątek

y – cyfra jedności

10x + y – szukana liczba

$\left\{\begin{array}{c}10x+y=4\left(x+y\right)+3\\10x+y=15\left(y-x\right)+2\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}10x+y=4x+4y+3\\10x+y=15y-15x+2\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}6x-3y=3 /:3\\25x-14y=2\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}2x-y=1 \\25x-14y=2\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{c}y=2x-1 \\25x-14\left(2x-1\right)=2\end{array}\right. $ $\left\{\begin{array}{c}y=2x-1 \\25x-28x+14=2\end{array}\right. $ $\left\{\begin{array}{c}y=2x-1 \\-3x=-12 /:(-3)\end{array}\right. $ $\left\{\begin{array}{c}x=4\\y=7\end{array}\right. $

Szukaną liczbą jest 47.

|  |  |
| --- | --- |
| Oznaczenie cyfry dziesiątek i cyfry jedności  | 1 pkt |
| Zapisanie szukanej liczby w postaci 10x + y | 1 pkt |
| Zapisanie pierwszego równania | 1 pkt |
| Zapisanie drugiego równania | 1 pkt |
| Rozwiązanie układu równań | 2 pkt |
| Podanie odpowiedzi: szukana liczba to 47. | 1 pkt |

**UWAGA:**

Jeżeli układ równań rozwiązany jest z usterką, przyznajemy za rozwiązanie układu 1 pkt. Nie przyznajemy wówczas punktu za odpowiedź.

**Zadanie nr 18 ( 6 pkt )**

W dwóch pudełkach znajdują się czerwone i białe kule. W pierwszym jest 15 kul, w tym 5 białych. W drugim pudełku jest 25 kul, w tym 18 czerwonych. Do obu pudełek dokładamy jeszcze

16 białych kul. Oblicz, po ile kul należy dołożyć do każdego z pudełek, aby prawdopodobieństwo wylosowania białej kuli z każdego z nich było takie samo.

Rozwiązanie:

Wprowadzamy oznaczenia:

 x - liczba białych kul dołożonych do I pudełka

16-x - liczba białych kul dołożonych do II pudełka

I pudełko 15+x kul, w tym 5+x białych

II pudełko 25+16-x kul, w tym 7+16-x białych

Układamy równanie $\frac{5+x}{15+x}$ = $\frac{23-x}{41-x}$ stąd (5+x)(41-x)=(15+x)(23-x)

205-5x+41x-x²=345-15x+23x-x²

czyli 28x=140, a więc x=5 16-5=11

Do I pudełka dokładamy 5 kul, do II 11 kul.

|  |  |
| --- | --- |
| Zapisanie liczby kul i liczby białych kul w każdym z pudełek po dołożeniu białych kul | 2 pkt |
| Ułożenie równania | 1 pkt |
| Zastosowanie własności proporcji | 1 pkt |
| Rozwiązanie równania x=5 | 1 pkt |
| Odpowiedź: do I pudełka dokładamy 5 kul, do II 11 kul | 1 pkt |

x – ilość białych kul dołożonych do I pudełka

y – ilość białych kul dołożonych do II pudełka

 $\left\{\begin{array}{c}x+y=16\\\frac{5+x}{15+x}=\frac{7+y}{25+y}\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}x+y=16 \\\left(5+x\right)\left(25+y\right)=\left(15+x\right)\left(7+y\right)\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{c}x+y=16 \\125+5y+25x+xy=105+15y+7x+xy\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}x+y=16 \\18x-10y=-20\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{c}5x+5y=80\\9x-5y=-10\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}14x=70 /:14\\x+y=16 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}x=5 \\5+y=16\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}x=5\\y=11\end{array}\right.$

Do I pudełka dokładamy 5 kul, do II 11 kul.

|  |  |
| --- | --- |
| Wprowadzenie oznaczeń | 1 pkt |
| Zapisanie układu równań | 2 pkt |
| Zastosowanie własności proporcji | 1 pkt |
| Rozwiązanie układu równań x=5, y=11 | 1 pkt |
| Odpowiedź  | 1 pkt |

**Zadanie nr 19 ( 8 pkt )**

Oblicz pole powierzchni i objętość czworościanu foremnego o krawędzi długości 3c.

Rozwiązanie:

 

$P=4∙\frac{a^{2}\sqrt{3}}{4}=a^{2}\sqrt{3}=\left(3c\right)^{2}∙\sqrt{3}=9c^{2}\sqrt{3}$

Wysokość podstawy $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{3c\sqrt{3}}{2}$, obliczamy $\frac{2}{3} $wysokości podstawy $\frac{2}{3}∙\frac{3c\sqrt{3}}{2}=c\sqrt{3}$

Aby obliczyć wysokość czworościanu H, zapisujemy twierdzenie Pitagorasa

$H^{2}+\left(c\sqrt{3}\right)^{2}=\left(3c\right)^{2}$ $H^{2}+3c^{2}=9c^{2}$ $H^{2}=6c^{2}$ $H=c\sqrt{6}$

$V=\frac{1}{3}P\_{p}∙H=\frac{1}{3}∙\frac{a^{2}\sqrt{3}}{4}∙H=\frac{1}{3}∙\frac{\left(3c\right)^{2}\sqrt{3}}{4}∙c\sqrt{6}=\frac{1}{3}∙\frac{9c^{2}\sqrt{3}}{4}∙c\sqrt{6}=\frac{3c^{3}\sqrt{18}}{4}=\frac{9c^{3}\sqrt{2}}{4}$

|  |  |
| --- | --- |
| Rysunek  | 1 pkt |
| Obliczenie pola powierzchni czworościanu (1 pkt za wzór na pole trójkąta równobocznego) | 2 pkt |
| Obliczenie $\frac{2}{3} $wysokości podstawy | 1 pkt |
| Poprawne zapisanie twierdzenia Pitagorasa | 1 pkt |
| Obliczenie wysokości czworościanu | 1 pkt |
| Obliczenie objętości czworościanu (1 pkt za poprawną metodę) | 2 pkt |

**UWAGA:**

**Za każde poprawne rozwiązanie inne niż w schemacie oceniania przyznajemy maksymalną liczbę punktów.**